Intervalo de confianza para proporciones

Ejercicio nº 1.-

El 60% de una población de 20 000 habitantes tiene los ojos oscuros. Si elegimos al azar 50 personas de esa población, ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 30 personas con los ojos oscuros?

Ejercicio nº 2.-

Un examen de 100 preguntas admite como respuesta en cada una de ellas dos posibilidades, verdadero o falso. Si un alumno contesta al azar, calcula la probabilidad de que acierte más de 60 respuestas.

Ejercicio nº 3.-

El 7% de los pantalones de una determinada marca salen con algún defecto. Se empaquetan en caja de 80 para distribuirlos por diferentes tiendas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una caja haya más de 10 pantalones defectuosos?

Ejercicio nº 4.-

En una urna hay 3 bolas rojas, 2 blancas y 5 verdes. Sacamos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Si repetimos la experiencia 50 veces, ¿cuál es la probabilidad de sacar roja en más de 20 ocasiones?

Ejercicio nº 5.-

Lanzamos un dado 300 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengamos más de 70 unos?

Ejercicio nº 6.-

En una moneda defectuosa, la probabilidad de obtener cara es de 0,586. Si hacemos tandas de 40 lanzamientos:

a) ¿Cómo se distribuye la proporción de caras en esas tandas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de caras en una tanda sea mayor de 0,6?

Ejercicio nº 7.-

El 1% de las soldaduras hechas en una máquina son defectuosas. Cada día se revisan 1 000 de ellas.

a) ¿Cómo se distribuye la proporción diaria de soldaduras defectuosas (entre las 1 000 que se revisan cada día)?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, en un día, haya entre 8 y 10 soldaduras defectuosas (ambos incluidos)?

Ejercicio nº 8.-

En una empresa que cuenta con 1 200 empleados, la proporción de los que hablan inglés es de 1 020/1 200.

a) Indica los parámetros de la distribución a la que se ajustarían las muestras de 35 empleados. ¿Cuál es la distribución?

b) Calcula la probabilidad de que, en una muestra de 35 empleados, haya entre 25 y 30 que hablan inglés (ambos incluidos).

Ejercicio nº 9.-

El 11% de los billetes de lotería reciben algún tipo de premio.

a) ¿Cuál es la distribución de la proporción de billetes premiados en muestras de 46 billetes?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener más de 6 billetes premiados en muestras de 46?

Ejercicio nº 10.-

En un instituto de 900 alumnos, la proporción de chicas es de 585/900.

a) ¿Cuál es la distribución de la proporción de chicas en muestras de 30 alumnos?

b) Halla la probabilidad de que, en una muestra de 30, haya entre 20 y 25 chicas (ambos incluidos).

Ejercicio nº 11.-

Seis de cada diez familias de cierta ciudad poseen ordenador. Halla el intervalo característico para la proporción de familias con ordenador, en muestras de 35 familias de esa ciudad, correspondiente al 90%.

Ejercicio nº 12.-

El 65% de los alumnos de cierta localidad utiliza con regularidad la biblioteca del pueblo. Halla un intervalo en el que se encuentre el 95% de las proporciones de alumnos que utilizan la biblioteca en muestras de tamaño 60.

Ejercicio nº 13.-

La probabilidad de obtener un 3 en un dado trucado es de 0,18. Encuentra el intervalo característico para la proporción de treses en tandas de 100 lanzamientos, correspondiente a una probabilidad del 95,44%.

Ejercicio nº 14.-

La proporción de vecinos de cierta localidad que está a favor de la gestión económica del ayuntamiento es de 29/50. Halla el intervalo característico para la proporción de vecinos a favor de dicha gestión económica, en muestras de 80 vecinos, correspondiente al 99,73%.

Ejercicio nº 15.-

La proporción de alumnos de cierto instituto que aprueban matemáticas es de 560/800. Halla el intervalo característico para la proporción de aprobados en matemáticas, en muestras de 30 alumnos, correspondiente al 99%.

Ejercicio nº 16.-

De una muestra de 100 familias de una población, hay 20 que poseen lavaplatos. Calcula el intervalo de confianza aproximado para la proporción poblacional, para un nivel de confianza del 99%.

Ejercicio nº 17.-

En una encuesta realizada a 150 familias de una determinada población, se encontró que en 25 de ellas había tres o más hijos. Halla el intervalo de confianza para estimar la proporción real de las familias en las que hay tres o más hijos, con un nivel de confianza del 90%.

Ejercicio nº 18.-

De 1 500 personas encuestadas en un sondeo preelectoral, 800 manifiestan su intención de votar. ¿Entre qué valores puede estimarse, con un 95% de confianza, que se encontrará el nivel de abstención en el conjunto del censo?

Ejercicio nº 19.-

Una muestra de 100 votantes, elegidos al azar entre todos los de un distrito, indicó que el 55% de ellos estaba a favor de un candidato determinado. Halla el intervalo de confianza del 99,73% para la proporción de todos los votantes del distrito que estaban a favor del candidato.

Ejercicio nº 20.-

En cierto instituto de Enseñanza Secundaria hay matriculados 800 alumnos. A una muestra seleccionada aleatoriamente de un 15% de ellos, se les preguntó si utilizaban la cafetería del instituto. Contestaron negativamente un total de 24 alumnos.

Halla el intervalo de confianza del 99% para estimar la proporción de alumnos que utilizan la cafetería del instituto.

Ejercicio nº 21.-

En cierta ciudad se sabe que el porcentaje de habitantes con estudios superiores se sitúa en torno al 15%. Se desea actualizar los datos y, para ello, se va a extraer una muestra aleatoria de tamaño n para hacer la estimación del porcentaje actual. ¿De que tamaño mínimo deberemos seleccionar la muestra para que le error en la estimación de la proporción sea menor de 0,02, con un nivel de confianza del 95,44%?

Ejercicio nº 22.-

A través de una encuesta realizada a 800 personas sobre la elección de alcalde de una ciudad, se estimó que la proporción de votantes al canditato A estaba entre el 54% y el 59%. ¿Con qué nivel de confianza se realizó la estimación?

Ejercicio nº 23.-

Para estimar la proporción de las familias de una determinada ciudad que poseen microondas, se va a tomar una muestra aleatoria de tamaño n. Calcula el mínimo valor de n para garantizar que, con un nivel de confianza del 95%, el error en la estimación sea menor que 0,05. (Ya que se desconoce la proporción, se tiene que tomar el caso más desfavorable de que sea 0,5).

Ejercicio nº 24.-

Una moneda está trucada de manera que 40 de cada 100 veces que se lanza sale cara. ¿Cuántas veces se ha de lanzar esta moneda, como mínimo, para que la proporción de caras obtenidas no difiera de la proporción verdadera en más de un 2%, con un nivel de confianza del 90%?

.

Ejercicio nº 25.-

Queremos estimar, con un nivel de confianza del 99%, la proporción de alumnos de cierto instituto que tienen dos o más hermanos. ¿De qué tamaño mínimo tendremos que seleccionar la muestra si admitimos un error máximo de 0,1? (En otro estudio reciente se obtuvo que esta proporción era de 0,4).

Solución Intervalo para proporciones

Ejercicio nº 1.-

El 60% de una población de 20 000 habitantes tiene los ojos oscuros. Si elegimos al azar 50 personas de esa población, ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de 30 personas con los ojos oscuros?

Solución:

Si llamamos $x =$ "número de personas con los ojos oscuros", entonces x es una binomial con $n =$ 50, $p = 0{,}6$, en la que tenemos que calcular $p\left[x < 30\right]$.

La calculamos aproximando con una normal:

La media de x es $np = 50\,0{,}6 = 30$, su desviación típica es $\sqrt{npq} = 3{,}46$.

$$x \text{ es } B(50;\ 0{,}6) \rightarrow x' \text{ es } N(30;\ 3{,}46) \rightarrow z \text{ es } N(0,\ 1)$$

$$p[x < 30] = p[x' < 29{,}5] = p\left[z < \frac{29{,}5 \quad 30}{3{,}46}\right] = p[z < -0{,}08] = p[z > 0{,}08] = 1 - p[z < 0{,}08] =$$

$$= 1 - 0{,}5319 = 0{,}4681 \quad \rightarrow \quad p[x < 30] = 0{,}4681$$

Ejercicio nº 2.-

Un examen de 100 preguntas admite como respuesta en cada una de ellas dos posibilidades, verdadero o falso. Si un alumno contesta al azar, calcula la probabilidad de que acierte más de 60 respuestas.

Solución:

Si llamamos $x =$ "número de respuestas acertadas", entonces x es una binomial con $n = 100$, $p = \frac{1}{2}$, en la que tenemos que calcular.

$p[x > 60]$ (La media de x es np = 50. Su desviación típica es $\sqrt{npq} = 5$).

La calculamos aproximando con una normal:

$$x \text{ es } B\left(100,\ \frac{1}{2}\right) \quad \rightarrow \quad x' \text{ es } N(50,\ 5) \quad \rightarrow \quad z \text{ es } N(0,\ 1)$$

$$p[x > 60] = p[x' \geq 60{,}5] = p\left[z \geq \frac{60{,}5 - 50}{5}\right] = p[z \geq 2{,}1] =$$

$$= 1 - p[z < 2{,}1] = 1 - 0{,}9821 = 0{,}0179 \quad \rightarrow \quad p[x > 60] = 0{,}0179$$

Ejercicio nº 3.-

El 7% de los pantalones de una determinada marca salen con algún defecto. Se empaquetan en caja de 80 para distribuirlos por diferentes tiendas. ¿Cuál es la probabilidad de que en una caja haya más de 10 pantalones defectuosos?

Solución:

Si llamamos $x =$ "número de pantalones defectuosos en una caja", entonces x es una binomial con $n = 80$; $p = 0,07$, en la que hay que calcular $p[x > 10]$.

La calculamos aproximando con una normal:

La media de x es $np = 80 \quad 0,07 = 5,6$; su desviación típica es $\sqrt{npq} = 2,28$.

$$x \text{ es } B(80;\ 0,07) \to x' \text{ es } N(5,6;\ 2,28) \to z \text{ es } N(0,\ 1)$$

$$p[x > 10] = p[x' \geq 10,5] = p\left[z \geq \frac{10,5 - 5,6}{2,28}\right] = p[z \geq 2,15] =$$

$$= 1 - p[z < 2,15] = 1 - 0,9842 = 0,0158 \quad \to \quad p[x > 10] = 0,0158$$

Ejercicio nº 4.-

En una urna hay 3 bolas rojas, 2 blancas y 5 verdes. Sacamos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Si repetimos la experiencia 50 veces, ¿cuál es la probabilidad de sacar roja en más de 20 ocasiones?

Solución:

Si llamamos x = "número de bolas rojas", entonces x es una binomial con $n = 50$,
$p = \frac{3}{10} = 0,3$, en la que tenemos que calcular $p[x > 20]$.

La calculamos aproximando con una normal:

La media de x es $np = 50 \cdot 0,\ 3 = 15$; su desviación típica es $\sqrt{npq} = 3,24$.

$$x \text{ es } B(50;\ 0,3) \to x' \text{ es } N(15;\ 3,24) \to z \text{ es } N(0,\ 1)$$

$$p[x > 20] = p[x' \geq 20,5] = p\left[z \geq \frac{20,5 - 15}{3,24}\right] = p[z \geq 1,70] =$$

$$= 1 - p[z < 1,70] = 1 - 0,9554 = 0,0446 \quad \to \quad p[x > 20] = 0,0446$$

Ejercicio nº 5.-

Lanzamos un dado 300 veces. ¿Cuál es la probabilidad de que obtengamos más de 70 unos?

Solución:

Si llamamos x = "número de unos obtenidos", entonces x es una binomial con $n = 300$,
$p = \frac{1}{6}$, en la que tenemos que calcular $p[x > 70]$.

La calculamos aproximando con una normal:

La media de x es $np = 300 \cdot \frac{1}{6} = 50$ y su desviación típica es $\sqrt{npq} = 6,45$.

$$x \text{ es } B\left(300,\ \frac{1}{6}\right) \to x' \text{ es } N(50;\ 6,45) \to z \text{ es } N(0,\ 1)$$

$$[x > 70] = p[x' \geq 70,5] = p\left[z \geq \frac{70,5 - 50}{6,45}\right] = p[z \geq 3,18] =$$

$= 1 - p[z < 3{,}18] = 1 - 0{,}9993 = 0{,}0007 \quad \rightarrow \quad p[x > 70] = 0{,}0007$

<u>Ejercicio nº 6.-</u>

En una moneda defectuosa, la probabilidad de obtener cara es de 0,586. Si hacemos tandas de 40 lanzamientos:

a) ¿Cómo se distribuye la proporción de caras en esas tandas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de caras en una tanda sea mayor de 0,6?

Solución:

a) La distribución de la proporción de caras en las tandas, *pr*, es una normal de media $p = 0{,}586$ y de desviación típica $\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}586 \cdot 0{,}414}{40}} = 0{,}078$. Es decir, *pr* es

N (0,586; 0,078).

b) En una tanda de 40, una proporción mayor de 0,6 es obtener más de $40 \cdot 0{,}6 = 24$ caras.

En una B (40; 0,586), tenemos que calcular $P[x > 24]$. Como $np \geq 5$ y $np \geq 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = np = 40 \cdot 0{,}586 = 23{,}44$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{40 \cdot 0{,}586 \cdot 0{,}414} = 3{,}12$.

Así, si

x es B (40; 0,586) $\rightarrow$ x' es N (23,44; 3,12) $\rightarrow$ z es N (0, 1), entonces:

$$P[x > 24] = P[x' \geq 24{,}5] = P\left[z \geq \frac{24{,}5 - 23{,}44}{3{,}12}\right] = P[z \geq 0{,}34] = 1 - P[z < 0{,}34] =$$

$$= 1 - 0{,}6331 = 0{,}3669$$

La probabilidad pedida es de 0,3669.

<u>Ejercicio nº 7.-</u>

El 1% de las soldaduras hechas en una máquina son defectuosas. Cada día se revisan 1 000 de ellas.

a) ¿Cómo se distribuye la proporción diaria de soldaduras defectuosas (entre las 1 000 que se revisan cada día)?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, en un día, haya entre 8 y 10 soldaduras defectuosas (ambos incluidos)?

Solución:

a) La proporción diaria, *pr*, de soldaduras defectuosas se distribuye según una normal de media $p = 0{,}01$ y de desviación típica $\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}01 \cdot 0{,}99}{1\,000}} = 0{,}003$.

Es decir, *pr* es N (0,01; 0,003).

b) En una B (1 000; 0,01), tenemos que calcular $P[8 \leq x \leq 10]$. Como $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, podemos aproximar mediante una normal de media $\mu = np = 10$ y de desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99} = 3{,}15$. Así, si:

x es B (1 000; 0,01) $\rightarrow$ x' es N (10; 3,15) $\rightarrow$ z es N (0, 1), entonces:

$$P[8 \le x \le 10] = P[7{,}5 \le x' \le 10{,}5] = P\left[\frac{7{,}5-10}{3{,}15} \le z \le \frac{10{,}5-10}{3{,}15}\right] = P[-0{,}79 \le z \le 0{,}16] =$$

$$= P[z \le 0{,}16] - P[z \le -0{,}79] = P[z \le 0{,}16] - P[z \ge 0{,}79] = P[z \le 0{,}16] - (1 - P[z < 0{,}79]) =$$

$= 0{,}5636 - (1 - 0{,}7852) = 0{,}\ 3488$

La probabilidad pedida es de 0,3488.

Ejercicio nº 8.-

En una empresa que cuenta con 1 200 empleados, la proporción de los que hablan inglés es de 1 020/1 200.

a) Indica los parámetros de la distribución a la que se ajustarían las muestras de 35 empleados. ¿Cuál es la distribución?

b) Calcula la probabilidad de que, en una muestra de 35 empleados, haya entre 25 y 30 que hablan inglés (ambos incluidos).

Solución:

a) La proporción de empleados que hablan inglés, *pr*, en muestras de 35, es una distribución normal con media $p = \frac{1\ \ 020}{1\ \ 200} = 0{,}85$ y con desviación típica

$$\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}85 \cdot 0{,}15}{35}} = 0{,}06.$$

Es decir, *pr* es N (0,85; 0,06).

b) En una B (35; 0,85), tenemos que calcular $P\,[25 \le x \le 30]$. Como $np \ge 5$ y $nq \ge 5$, podemos aproximar por una normal de media $\mu = np = 29{,}75$ y de desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{35 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}15} = 2{,}11$. Así, si

x es B (35; 0,85) $\rightarrow$ x' es N (29,75; 2,11) $\rightarrow$ z es N (0, 1), entonces:

$$P[25 \le x \le 30] = P[24{,}5 \le x' \le 30{,}5] = P\left[\frac{24{,}5-29{,}75}{2{,}11} \le z \le \frac{30{,}5-29{,}75}{2{,}11}\right] =$$

$$= P[-2{,}49 \le z \le 0{,}36] = P[z \le 0{,}36] - P[z \le -2{,}49] = P[z \le 0{,}36] - P[z \ge 2{,}49] =$$

$$= P[z \le 0{,}36] - (1 - P[z < 2{,}49]) = 0{,}6406 - (1 - 0{,}9936) = 0{,}6342$$

La probabilidad pedida es de 0,6342.

Ejercicio nº 9.-

El 11% de los billetes de lotería reciben algún tipo de premio.

a) ¿Cuál es la distribución de la proporción de billetes premiados en muestras de 46 billetes?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener más de 6 billetes premiados en muestras de 46?

Solución:

a) La distribución de la proporción de billetes premiados, *pr*, en muestras de 46 billetes, es una normal de media $p = 0{,}11$ y de desviación típica $\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}11 \cdot 0{,}89}{46}} = 0{,}046.$

Es decir , *pr* es *N* (0,11; 0,046).

b) En una *B* (46; 0,11) tenemos que calcular *P* [$x > 6$]. Como $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, podemos aproximar por una normal de media $\mu = np = 5{,}06$ y de desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{46 \cdot 0{,}11 \cdot 0{,}89} = 2{,}12.$$

x es *B* (46; 0,11) $\rightarrow$ x' es *N* (5,06; 2,12) $\rightarrow$ z es *N* (0, 1), entonces:

$$P[x > 6] = P[x' \geq 6{,}5] = P\left[z \geq \frac{6{,}5 - 5{,}06}{2{,}12}\right] = P[z \geq 0{,}68] = 1 - P[z < 0{,}68] = 1 - 0{,}7518 =$$
$$= 0{,}2482$$

La probabilidad pedida es de 0,2482.

Ejercicio nº 10.-

En un instituto de 900 alumnos, la proporción de chicas es de 585/900.

a) ¿Cuál es la distribución de la proporción de chicas en muestras de 30 alumnos?

b) Halla la probabilidad de que, en una muestra de 30, haya entre 20 y 25 chicas (ambos incluidos).

Solución:

a) La proporción de chicas, *pr*, en muestras de 30, se distribuye según una normal de media $p = \frac{585}{900} = 0{,}65$ y de desviación típica $\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}65 \cdot 0{,}35}{30}} = 0{,}087.$

Es decir, *pr* es una *N* (0,65; 0,087).

b) Es una *B* (30; 0,65), tenemos que calcular *P* [$20 \leq x \leq 25$]. Como $np \geq 5$ y $nq \geq 5$, podemos aproximar por una normal de media $\mu = np = 19{,}5$ y de desviación típica
$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{30 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}35} = 2{,}61.$ Así, si

x es *B* (30; 0,65) $\rightarrow$ x' es *N* (19,5; 2,61) $\rightarrow$ z es *N* (0, 1), entonces:

$$P[20 \leq x \leq 25] = P[19{,}5 \leq x' \leq 25{,}5] = P\left[\frac{19{,}5 - 19{,}5}{2{,}61} \leq z \leq \frac{25{,}5 - 19{,}5}{2{,}61}\right] = P[0 \leq z \leq 2{,}30] =$$

$$= P[0 \leq z \leq 2{,}30] = P[z \leq 2{,}30] - 0{,}5 = 0{,}9893 - 0{,}5 = 0{,}4893$$

La probabilidad pedida es de 0,4893.

Ejercicio nº 11.-

Seis de cada diez familias de cierta ciudad poseen ordenador. Halla el intervalo característico para la proporción de familias con ordenador, en muestras de 35 familias de esa ciudad, correspondiente al 90%.

Solución:

La proporción de familias con ordenador, en muestras de 35, se distribuye según una normal media $p = \frac{6}{10} = 0{,}6$ y desviación típica $\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{35}} = 0{,}083.$

Para el 90%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}9 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}645.$

El intervalo característico será:

$(0{,}6 - 1{,}645 \cdot 0{,}083;\ 0{,}6 + 1{,}645 \cdot 0{,}083)$; es decir:

$(0{,}46;\ 0{,}74)$

Esto significa que, en el 90% de las muestras de 35 familias, la proporción de las que poseen ordenador está entre 0,46 y 0,74.

Ejercicio nº 12.-

El 65% de los alumnos de cierta localidad utiliza con regularidad la biblioteca del pueblo. Halla un intervalo en el que se encuentre el 95% de las proporciones de alumnos que utilizan la biblioteca en muestras de tamaño 60.

Solución:

La proporción de alumnos que utilizan la biblioteca, en muestras de 60, se distribuye según una normal de media $p = 0{,}65$ y de desviación típica $\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}65 \cdot 0{,}35}{60}} = 0{,}062.$

Para el 95%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96.$

El intervalo característico será:

$(0{,}65 - 1{,}96 \cdot 0{,}062;\ 0{,}65 + 1{,}96 \cdot 0{,}062)$; es decir:

$(0{,}53;\ 0{,}77)$

Esto significa que, en el 95% de las muestras de 60, la proporción está entre 0,53 y 0,77.

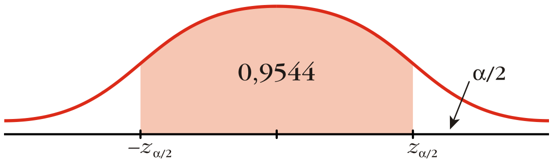
Ejercicio nº 13.-

La probabilidad de obtener un 3 en un dado trucado es de 0,18. Encuentra el intervalo característico para la proporción de treses en tandas de 100 lanzamientos, correspondiente a una probabilidad del 95,44%.

Solución:

La proporción de treses en tandas de 100 lanzamientos sigue una distribución normal de media $p = 0{,}18$ y de desviación típica $\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}18 \cdot 0{,}82}{100}} = 0{,}038.$

Para una probabilidad del 95,44%, tenemos que:



$1 - \alpha = 0{,}9544 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}0228$

$P\,[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}9544 + 0{,}0228 = 0{,}9772 \;\;\rightarrow\;\; z_{\alpha/2} = 2$

El intervalo característico será:

$(0{,}18 - 2 \cdot 0{,}038;\;\; 0{,}18 + 2 \cdot 0{,}038)$; es decir:

$(0{,}104;\; 0{,}256)$

Esto significa que, en el 95,44% de las tandas de 100 lanzamientos, la proporción de treses está entre 0,104 y 0,256.

Ejercicio nº 14.-

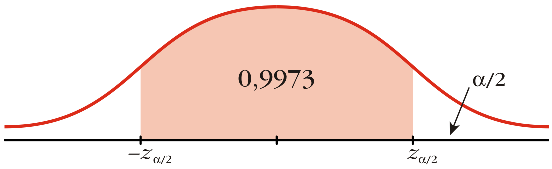
La proporción de vecinos de cierta localidad que está a favor de la gestión económica del ayuntamiento es de 29/50. Halla el intervalo característico para la proporción de vecinos a favor de dicha gestión económica, en muestras de 80 vecinos, correspondiente al 99,73%.

Solución:

La proporción de vecinos a favor de la gestión económica del ayuntamiento, en muestras de 80, se distribuye según una normal de media $p = 29/50 = 0{,}58$ y de desviación típica

$$\sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}58 \cdot 0{,}42}{80}} = 0{,}055.$$

Para una probabilidad del 99,73%, tenemos que:



$1 - \alpha = 0{,}9973 \;\;\rightarrow\;\; \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}00135$

$P\,[z \le z_{\alpha/2}] = 0{,}9973 + 0{,}00135 = 0{,}99865 \;\;\rightarrow\;\; z_{\alpha/2} = 3$

El intervalo característico será:

$(0{,}58 - 3 \cdot 0{,}055;\;\; 0{,}58 + 3 \cdot 0{,}055)$; es decir:

$(0{,}415;\; 0{,}745)$

Esto significa que, en el 99,73% de las muestras de 80 vecinos, la proporción de los que están a favor está entre 0,415 y 0,745.

Ejercicio nº 15.-

La proporción de alumnos de cierto instituto que aprueban matemáticas es de 560/800. Halla el intervalo característico para la proporción de aprobados en matemáticas, en muestras de 30 alumnos, correspondiente al 99%.

Solución:

La proporción de aprobados en matemáticas, en muestras de 30 alumnos, se distribuye según una normal de media $p = \dfrac{560}{800} = 0{,}7$ y de desviación típica $\sqrt{\dfrac{pq}{n}} = \sqrt{\dfrac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{30}} = 0{,}084.$

Una probabilidad del 99% significa $1 - \alpha = 0{,}99 \;\;\rightarrow\;\; z_{\alpha/2} = 2{,}575.$

El intervalo característico será:

$(0{,}7 - 2{,}575 \cdot 0{,}084;\ \ 0{,}7 + 2{,}575 \cdot 0{,}084)$; es decir:

$(0{,}48;\ 0{,}92)$

Esto significa que, en el 99% de las muestras de 30 alumnos, la proporción de aprobados en matemáticas está entre 0,48 y 0,92.

<u>Ejercicio nº 16.-</u>

De una muestra de 100 familias de una población, hay 20 que poseen lavaplatos. Calcula el intervalo de confianza aproximado para la proporción poblacional, para un nivel de confianza del 99%.

Solución:

Queremos estimar la proporción poblacional mediante una muestra de tamaño 100, con un nivel de confianza del 99%.

El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}};\ \ pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}} \right)$$

Para un nivel de confianza del 99%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}99 \ \rightarrow\ z_{\alpha/2} = 2{,}575$

El valor de pr es el de la proporción obtenida en la muestra:

$$pr = \frac{20}{100} = 0{,}2$$

Así, el intervalo con confianza será:

$$\left(0{,}2 - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{100}};\ \ 0{,}2 + 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{100}} \right);\ \ \text{es decir:}$$

$(0{,}097;\ 0{,}303)$

Esto significa que tenemos una confianza del 99% de que la proporción en la población está comprendida entre 0,097 y 0,303.

<u>Ejercicio nº 17.-</u>

En una encuesta realizada a 150 familias de una determinada población, se encontró que en 25 de ellas había tres o más hijos. Halla el intervalo de confianza para estimar la proporción real de las familias en las que hay tres o más hijos, con un nivel de confianza del 90%.

Solución:

Queremos estimar la proporción en la población, p, mediante una muestra de tamaño 150, con un nivel de confianza del 90%.

El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}};\ \ pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}} \right)$$

Para un nivel de confianza del 90%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}9 \;\rightarrow\; z_{\alpha/2} = 1{,}645$

El valor de pr es el de la proporción obtenida en la muestra:

$$pr = \frac{25}{150} = 0{,}17$$

Por tanto, el intervalo con confianza será:

$$\left(0{,}17 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}17 \cdot 0{,}83}{150}};\; 0{,}17 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}17 \cdot 0{,}83}{150}}\right); \text{ es decir:}$$

(0,12; 0,22)

Esto significa que tenemos una confianza del 90% de que la proporción en la población está comprendida entre 0,12 y 0,22.

Ejercicio nº 18.-

De 1 500 personas encuestadas en un sondeo preelectoral, 800 manifiestan su intención de votar. ¿Entre qué valores puede estimarse, con un 95% de confianza, que se encontrará el nivel de abstención en el conjunto del censo?

Solución:

Queremos estimar la proporción poblacional mediante una muestra de tamaño 1 500, con un nivel de confianza del 95%.

El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}};\; pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr\,(1-pr)}{n}}\right)$$

Para un nivel de confianza del 95%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}95 \;\rightarrow\; z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El valor de pr es el de la proporción obtenida en la muestra sobre el nivel de abstención, es decir:

$$pr = \frac{1\,500 - 800}{1\,500} = \frac{700}{1\,500} = 0{,}47$$

Por tanto, el intervalo con confianza será:

$$\left(0{,}47 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}47 \cdot 0{,}53}{1500}};\; 0{,}47 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}47 \cdot 0{,}53}{1500}}\right); \text{ es decir:}$$

(0,445; 0,495)

Esto significa que tenemos una confianza del 95% de que la proporción de abstenciones en la población se sitúa entre 0,445 y 0,495.

Ejercicio nº 19.-

Una muestra de 100 votantes, elegidos al azar entre todos los de un distrito, indicó que el 55% de ellos estaba a favor de un candidato determinado. Halla el intervalo de confianza del 99,73% para la proporción de todos los votantes del distrito que estaban a favor del candidato.

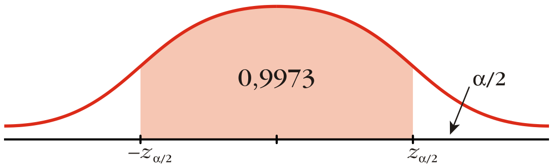
Solución:

Queremos estimar la proporción poblacional mediante una muestra de tamaño 100, con un nivel de confianza del 99,73%.

El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}};\ pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \right)$$

Para un nivel de confianza del 99,73%, tenemos que:



$$1-\alpha = 0{,}9973 \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}00135$$

$$P\left[z \le z_{\alpha/2}\right] = 1 - 0{,}00135 = 0{,}99865 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 3$$

El valor de pr es el de la proporción obtenida en la muestra; es decir, $pr = 0{,}55$.

Así, el intervalo de confianza será:

$$\left(0{,}55 - 3 \cdot \sqrt{\frac{0{,}55 \cdot 0{,}45}{100}};\ 0{,}55 + 3 \cdot \sqrt{\frac{0{,}55 \cdot 0{,}45}{100}} \right); \quad \text{es decir:}$$

(0,40; 0,70)

Esto significa que tenemos una confianza del 99,73% de que la proporción poblacional se sitúa entre 0,40 y 0,70.

<u>Ejercicio nº 20.-</u>

En cierto instituto de Enseñanza Secundaria hay matriculados 800 alumnos. A una muestra seleccionada aleatoriamente de un 15% de ellos, se les preguntó si utilizaban la cafetería del instituto. Contestaron negativamente un total de 24 alumnos.

Halla el intervalo de confianza del 99% para estimar la proporción de alumnos que utilizan la cafetería del instituto.

Solución:

Queremos estimar la proporción poblacional mediante una muestra de tamaño:

$$n = 15\% \text{ de } 800 = 120$$

con un nivel de confianza del 99%.

El intervalo de confianza es de la forma:

$$\left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}};\ pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}} \right)$$

Para un nivel de confianza del 99%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}99 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 2{,}575$

El valor de pr es el de la proporción de alumnos en la muestra que sí utilizan la cafetería, es decir:

$$pr = \frac{120-24}{120} = \frac{96}{120} = 0{,}8$$

Por tanto, el intervalo con confianza será:

$$\left(0{,}8 - 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{120}};\ 0{,}8 + 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{120}}\right);\ \text{es decir:}$$

(0,706; 0,894)

Esto significa que tenemos una confianza del 99% de que la proporción poblacional se encuentra entre 0,706 y 0,894.

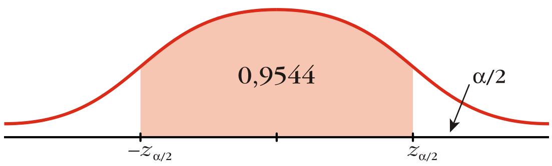
Ejercicio nº 21.-

En cierta ciudad se sabe que el porcentaje de habitantes con estudios superiores se sitúa en torno al 15%. Se desea actualizar los datos y, para ello, se va a extraer una muestra aleatoria de tamaño n para hacer la estimación del porcentaje actual. ¿De que tamaño mínimo deberemos seleccionar la muestra para que le error en la estimación de la proporción sea menor de 0,02, con un nivel de confianza del 95,44%?

Solución:

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr(1-pr)}{n}}$.

Para un nivel de confianza del 95,44%, tenemos que:



$$1-\alpha = 0{,}9544 \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}0228$$

$$P\left[z \le z_{\alpha/2}\right] = 1 - 0{,}0228 = 0{,}9772 \quad \rightarrow \quad z_{\alpha/2} = 2$$

El error máximo que admitimos es $E = 0{,}02$.

Para pr tomaremos el valor anterior: $pr = 0{,}15$.

Así, si sustituimos en la expresión anterior, tenemos que:

$$0{,}02 = 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{n}} \quad \rightarrow \quad \frac{0{,}02}{2} = \frac{\sqrt{0{,}15 \cdot 0{,}85}}{\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \sqrt{n} = \frac{\sqrt{0{,}15 \cdot 0{,}85} \cdot 2}{0{,}02} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{n} = 35{,}707 \quad \rightarrow \quad n = 1\,275$$

Deberemos seleccionar una muestra de, al menos, 1275 habitantes.

Ejercicio nº 22.-

A través de una encuesta realizada a 800 personas sobre la elección de alcalde de una ciudad, se estimó que la proporción de votantes al canditato A estaba entre el 54% y el 59%. ¿Con qué nivel de confianza se realizó la estimación?

Solución:

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr\,(1 - pr)}{n}}$.

Como se estimó que la proporción estaba entre el 54% y el 59%, es decir, entre 0,54 y 0,59, el error es:

$$E = \frac{0{,}59 - 0{,}54}{2} = 0{,}025$$

El valor de n es 800 y el de pr es el centro del intervalo (0,54; 0,59); es decir:

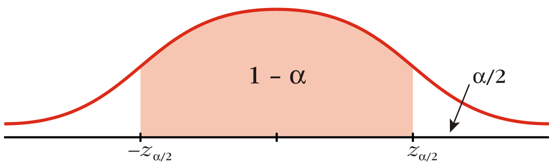
$$pr = \frac{0{,}54 + 0{,}59}{2} = 0{,}565$$

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que:

$$0{,}025 = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{0{,}565 \cdot 0{,}435}{800}} \;\rightarrow\; z_{\alpha/2} = 0{,}025 \cdot \sqrt{\frac{800}{0{,}565 \cdot 0{,}435}} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; z_{\alpha/2} = 1{,}43 \;\rightarrow\; P\left[z \le z_{\alpha/2}\right] = P\left[z \le 1{,}43\right] = 0{,}9236 = 1 - \frac{\alpha}{2} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \alpha = 0{,}1528 \;\rightarrow\; 1 - \alpha = 0{,}8472$$



La estimación se ha realizado con un nivel de confianza del 84,72%.

<u>Ejercicio nº 23.-</u>

Para estimar la proporción de las familias de una determinada ciudad que poseen microondas, se va a tomar una muestra aleatoria de tamaño n. Calcula el mínimo valor de n para garantizar que, con un nivel de confianza del 95%, el error en la estimación sea menor que 0,05. (Ya que se desconoce la proporción, se tiene que tomar el caso más desfavorable de que sea 0,5).

Solución:

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr\,(1 - pr)}{n}}$.

Para un nivel de confianza del 95%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}95 \;\rightarrow\; z_{\alpha/2} = 1{,}96$

En la indicación se nos dice que debemos tomar $pr = 0{,}5$.

Y sabemos que $E = 0{,}05$.

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que:

$$0{,}05 = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{n}} \;\rightarrow\; \frac{0{,}05}{1{,}96} = \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{n}} \;\rightarrow\; \frac{0{,}05}{1{,}96} = \frac{0{,}5}{\sqrt{n}} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \sqrt{n} = \frac{0{,}5 \cdot 1{,}96}{0{,}05} \;\rightarrow\; \sqrt{n} = 19{,}6 \;\rightarrow\; n = 384{,}16$$

Habrá que tomar una muestra de, al menos, 385 familias.

Ejercicio nº 24.-

Una moneda está trucada de manera que 40 de cada 100 veces que se lanza sale cara. ¿Cuántas veces se ha de lanzar esta moneda, como mínimo, para que la proporción de caras obtenidas no difiera de la proporción verdadera en más de un 2%, con un nivel de confianza del 90%?

Solución:

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr\,(1-pr)}{n}}$.

Para un nivel de confianza del 90%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}9 \;\rightarrow\; z_{\alpha/2} = 1{,}645$

El error máximo que admitimos es $E = 0{,}02$ (el 2%).

Sabemos que $p = \dfrac{40}{100} = 0{,}4$.

Así, si sustituimos la expresión anterior, tenemos que:

$$0{,}02 = 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{n}} \;\rightarrow\; \frac{0{,}02}{1{,}645} = \frac{\sqrt{0{,}24}}{\sqrt{n}} \;\rightarrow \sqrt{n} = \frac{\sqrt{0{,}24} \cdot 1{,}645}{0{,}02} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \sqrt{n} = 40{,}29 \;\rightarrow\; n = 1\,623{,}6$$

Tendríamos que lanzar la moneda, como mínimo, 1 624 veces.

Ejercicio nº 25.-

Queremos estimar, con un nivel de confianza del 99%, la proporción de alumnos de cierto instituto que tienen dos o más hermanos. ¿De qué tamaño mínimo tendremos que seleccionar la muestra si admitimos un error máximo de 0,1? (En otro estudio reciente se obtuvo que esta proporción era de 0,4).

Solución:

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\dfrac{pr\,(1-pr)}{n}}$.

Para un nivel de confianza del 99%, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}99 \;\rightarrow\; z_{\alpha/2} = 2{,}575$

El error máximo que admitimos es $E = 0{,}1$.

Para pr tomaremos el valor del estudio anterior, es decir, $pr = 0{,}4$.

Así, sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que:

$$0{,}1 = 2{,}575 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{n}} \;\rightarrow\; \frac{0{,}1}{2{,}575} = \frac{\sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6}}{\sqrt{n}} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \sqrt{n} = \frac{\sqrt{0{,}24} \cdot 2{,}575}{0{,}1} \;\rightarrow\; \sqrt{n} = 12{,}61 \;\rightarrow\; n = 159{,}14$$

Deberemos tomar, como mínimo, una muestra de 160 alumnos.